15 – Дәріс

***Тақырыбы:* Дәрежелік қатарлар. Тейлор қатары**

Анықтама. *Әрбір мүшесі дәрежелік функция болатын*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{1}$$

функциялық қатарды ***дәрежелік қатар*** *деп атайды.*

Мұндағы c_k , $k = 0,1,2,\ldots$ *сандары дәрежелік қатардың коэффциенттері деп аталады.*

Дәрежелік қатар $x = 0$ нүктесінде әрқашанда жинақты. Дәрежелік қатардың жинақталу аймағын табуға келесі теорема көмектеседі.

1-теорема. (Абель теоремасы). Егер (1) дәрежелік қатар:

а) x_0 - нүктесінде $(x_0 \neq 0)$ жинақталса, онда ол

$$|x| < |x_0|$$

аралығында жинақталады;

б) x_1 - нүктеде жинақсыз болса, онда ол

$$|x| > |x_1|$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x нүктелерінде жинақ-сыз болады.

Анықтама. *(1) - дәрежелік қатар жинақты болатын* $(-|x_0|,|x_0|)$ *аралықтарының* $|x_0|$ *- дің ең үлкен мәні (1) қатардың* ***жинақталу радиусі*** *деп аталады да, ол мәнді* R *арқылы белгілейді, ал* $(-R,R)$ *(1) - дәрежелік қатардың* ***жинақталу аралығы*** *деп аталады.*

Абель теоремасынан, (1) қатар $(-R,R)$ - аралығында жинақты яғни $(-\infty;-R)$ мен $(R;+\infty)$ аралықтарында жинақсыз болатынын көреміз. Ал $x = \pm R$ нүктелеріндегі (1) дәрежелік қатардың жинақтылығы қосымша зерттеледі.

Егер қатар тек қана $x = 0$ нүктеде жинақты болса, онда $R = 0$, ал ол x - тің барлық мәндерінде жинақты болса, онда $R = +\infty$ деп есептеледі.

Жинақталу радиусін табу үшін Даламбер мен Коши белгілерінен шығатын келесі формулаларды пайдаланады:

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|, \tag{2}$$

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}} . \tag{3}$$

2 - теорема. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ дәрежелік қатарының жинақталу аралығы $(-R;R)$ болса, онда ол қатар осы аралықта жататын кез келген $[\alpha;\beta] \subset (-R;R)$ кесіндісінде абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.

Бірқалыпты жинақталатын функциялық қатарлар қасиеттерін дәрежелік қатарларға арнап қарастырайық.

1) Дәрежелік қатардың $S(x)$ - қосындысы $(-R;R)$ - жинақталу аралығында үзіліссіз.

2) (1) - дәрежелік қатардың жинақталу аралығы $(-R;R)$ болсын. Онда кез келген $[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$ кесіндісі үшін

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\int_{\alpha}^{\beta}x^k dx=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\ \frac{\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}}{k+1}\ .$$

3) (1) - дәрежелік қатардың $(-R;R)$ - жинақталу аралығында (1) - дәрежелік қатардың қосындысының туындысы ол қатардың мүшелерінің туындыларынан құралған дәрежелік қатарға тең:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\right)'=\sum_{k=0}^{\infty}c_k kx^{ê-1}\ .$$

Ескерту. Бұл теңдіктің оң жағындағы дәрежелік қатардың жинақталу аралығы алғашқы (1) - дәрежелік қатардың жинақталу аймағы $(-R;R)$ болады.

4) (1) - дәрежелік қатардың қосындысы оның $(-R;R)$ - жинақталу аралығында шексіз рет дифференциалданады.

Анықтама. *Келесі функциялық қатарды*

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k \tag{4}$$

центрі x_0 ***нүктесі болатын, ығысылған дәрежелік қатар*** *дейді.*

Егер $x-x_0=y$ деп алса, онда ығысылған дәрежелік қатар (1) дәрежелік қатарға айналады:

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k y^k\ .$$

Сондықтан, (4) - қатардың жинақталу аралығын (x_0-R,x_0+R) түрінде жазуға болады да ол осы аралықта дәрежелік қатардың барлық қасиеттеріне ие болады.

Тейлор қатары

Анықтама. $f(x)$ - *функциясының*

$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$ *түрінде жіктелуін, осы* $f(x)$ ***функциясының Тейлор қатарына жіктелуі*** *деп атайды.*

4) - қасиетті пайдаланып

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots \tag{5}$$

дәрежелік қатарды (x_0-R,x_0+R) - жинақталу аралығында k - рет дифференциалдасақ

$$f^{(k)}(x)=k!c_k+(k+1)k\cdot\ldots\cdot 2\cdot c_{k+1}(x-x_0)+\ldots$$

аламыз. Мұнда $x=x_0$ деп алсақ

$$f^{(k)}(x_0)=k!c_k$$

немесе

$$c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Бұл теңдіктен $f(x)$ функциясының жинақталу аралығында дәрежелік қатарға жіктелуі жалғыз ғана түрде болатынын көреміз.

(6) - ны (5) - ке қойсақ $f(x)$ функциясының $(x-x_0)$ - дәрежесі бойынша Тейлор қатарына жіктелуін аламыз:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (7)$$

дербес жағдайда, $x_0=0$ болса, онда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(o)}{k!}x^k \qquad (8)$$

қатары $f(x)$ функциясының **Маклорен қатары** деп аталады.

f - функциясының $(x-x_0)$ - айырмасының дәрежесі бойынша Тейлор қатары, x_0 - нүктесінің қандай да бір маңайында **жинақты** және тап осы $f(x)$ функциясының өзіне жинақты болу шартын теорема түрінде (дәлелдеусіз) келтіреміз.

Теорема. Егер $f(x)$ - функциясының $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ кесіндісінде кез келген ретті туындылары бар және оның Тейлор формуласының қалдығы $n\to\infty$ (ұмтылғанда) нөлге ұмтылса

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0,\ x\in[x_0-\delta,x_0+\delta], \qquad (9)$$

онда f осы кесіндіде f функциясына жинақталатын Тейлор қатарына жіктеледі.